На правах рукописи

Бердинский Дмитрий Александрович

Представление Вейерштрасса поверхностей в трехмерных группах Ли и его приложения

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2009

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н., профессор
Тайманов Искандер Асанович

Официальные оппоненты:
д. ф.-м. н., профессор Дубровский Владислав Георгиевич,
д. ф.-м. н., профессор Царёв Сергей Петрович

Ведущая организация:
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

Защита состоится 1 октября 2009 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу:
630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 3 августа 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

0. 778619

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Представление Вейерштрасса (спинорное представление) поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве состоит в следующем.

Поверхность задается (локально) формулами

$$x^1 = x^1(0) + \int \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2 \right) dz - \frac{i}{2} \left(\psi_2^2 + \bar{\psi}_1^2 \right) d\bar{z} \right),$$

$$x^2 = x^2(0) + \int \left(\frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2 \right) dz + \frac{1}{2} \left(\psi_2^2 - \bar{\psi}_1^2 \right) d\bar{z} \right),$$

$$x^3 = x^3(0) + \int \left(\psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z} \right),$$

где z — конформный параметр на поверхности, $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$ решение уравнения Дирака

$$\mathcal{D}\psi = 0$$

и $\mathcal{D}$ — оператор Дирака с некоторым вещественным потенциалом $U(z, \bar{z})$

$$\mathcal{D} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \right].$$

При $U = 0$ мы получаем классическое представление Вейерштрасса–Эннепера минимальных поверхностей. Для общих поверхностей по-видимому впервые оно появилось в работе Эйзенхарта[1], в которой условие на ψ было выписано в виде уравнения

[1] L.P. Eisenhart, "A treatise on the differential geometry of curves and surfaces", 1909.

второго порядка на скалярную функцию ψ_1. В форме, использующей уравнение Дирака, это представление было переписано Конопельченко[2], использовавшим его для задания локальных солитонных деформаций поверхностей посредством модифицированного уравнения Веселова–Новикова. В работе Тайманова[3] введено глобальное представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей рода $g \geq 1$ и в случае торов доказано, что модифицированное уравнение Веселова–Новикова индуцирует деформацию торов, сохраняя при этом конформную структуру и значение функционала Уиллмора

$$\mathcal{W}(M) = 4\int_M U^2 \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} = \int_M H^2 d\mu,$$

где M — тор, H — средняя кривизна, $d\mu$ — элемент площади. При этом Таймановым был предложен новый подход к исследованию гипотезы Уиллмора, основанный на установленной в работе Тайманова[4] связи функционала Уиллмора и спектральной кривой оператора Дирака.

В работе Тайманова[5] подход, основанный на операторе Дирака, был применен к изучению поверхностей в $S^3 = SU(2)$. В данной диссертации эта техника используется для исследования поверхностей в следующих трехмерных группах Ли со специальными левоинвариантными метриками (геометриями Терстона):

нильпотентная группа Гейзенберга Nil,
универсальная накрывающая $\widetilde{SL}_2$ группы $SL(2)$,
разрешимая группа Sol.

---

[2] Konopelchenko B. G. Induced surfaces and their integrable dynamics // Stud. Appl. Math. 1996. V. 96. P. 9–52.

[3] Taimanov I. A. Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 133–151.

[4] Тайманов И.А. Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Функциональный анализ и его прил. 1998. Т. 32, №4. С. 49–62.

[5] Тайманов И. А. Операторы Дирака и конформные инварианты торов в $\mathbb{R}^3$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2004. Т. 244. С. 233–263.

Цель работы.

Нахождение аналога представления Вейерштрасса для поверхностей в группах Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol. Изучение приложений такого представления для исследования поверхностей постоянной средней кривизны (в частности минимальных поверхностей) в этих группах.

Нахождения аналога функционала Уиллмора для поверхностей в группе Nil и изучение его связи с геометрией поверхностей в этой группе.

Описание поверхностей постоянной средней кривизны в Nil, позволяющее применять методы теории интегрируемых систем.

Методы исследований.

В работе применяются теория представления Вейерштрасса и теория оператора Дирака.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

Получено представление Вейерштрасса поверхностей в группах Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol, наделенных терстоновскими метриками и, в частности, получено представление минимальных поверхностей в этих группах. С помощью этого представления, выведены аналоги дифференциала Хопфа для поверхностей в группах Nil и $\widetilde{SL}_2$. Для поверхностей в Nil доказано, что дифференциал Хопфа голоморфен если и только если поверхность имеет постоянную среднюю кривизну.

Для поверхностей в группе Nil, исходя из спектральной теории оператора Дирака, выведен аналог функционала Уиллмора (функционал спинорной энергии). Показано, что среди сфер вращения, минимум функционала спинорной энергии равен π и достигается в точности на сферах постоянной средней кривизны, на торах вращения функционал спинорной энергии строго больше нуля. Доказано, что сферы постоянной средней кривизны являются критическими точками функционала спинорной энергии.

Доказано, что поверхности постоянной средней кривизны в группе Nil, в окрестности неомбилической точки, описываются решениями эллиптического уравнения Sinh-Gordon, удовлетворяющими "условию вещественности". Это "условие вещественности" представлено в диссертации в виде дополнительного уравнения.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы для изучения теории поверхностей в трех трехмерных многообразиях Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol, снабженных геометриями Терстона, и также других трехмерных однородных пространствах. Результаты работы могут быть использованы специалистами по дифференциальной геометрии и интересны специалистам в области дифференциальных уравнений и математической физики.

Апробация работы.

По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих российских и международных конференциях:

- «Геометрия «в целом», топология и их приложения» (Харьков, Украина, 22–26 июня 2009 г.).
- «Математика в современном мире» (Новосибирск, 17–23 сентября 2007 г.).
- «Third Russian-German Geometry Meeting dedicated to 95th birthday of A.D.Alexandrov» (Санкт-Петербург, 18–23 июня 2007 г.).
- «Progress in Surface Theory» (Обервольфах, Германия, 29 апреля–5 мая 2007 г.).
- «Математика. Механика. Информатика» (Челябинск, 19–22 сентября 2006 г.).

- «Международная научная студенческая конференция» (Новосибирск, 11–13 апреля 2006 г.).

Кроме того, результаты диссертации докладывались на следующих семинарах Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН: семинар «Геометрия, топология, и их приложения» (руководитель чл.-корр. РАН И. А. Тайманов), семинар отдела анализа и геометрии (руководитель академик РАН Ю. Г. Решетняк).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-3].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, включающего 21 наименование. Общий объем диссертации составляет 77 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описываются основные результаты диссертации и дается краткий обзор по теме диссертации.

В первой главе вводится представление Вейерштрасса поверхностей в группах Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol, изучаются следствия такого представления и определяется функционал спинорной энергии замкнутой поверхности в группе Nil, который затем представляется в геометрических терминах.

Описание групп Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol наделенных терстоновскими метриками приводится в §1.4 диссертации. Там же, на языке левоинвариантных векторных полей, приводятся формулы для связности Леви-Чевиты отвечающей терстоновским метрикам.

Пусть $f : M \to G$ погружение поверхности в трехмерную группе Ли G, наделенную левоинвариантной метрикой. Выберем в некоторой окрестности на поверхности M конформный параметр z. В §1.2 объяснено, что поверхность $f(M)$ локально может быть представлена в терминах порождающих спиноров $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$, удовлетворяющих уравнению Дирака

$$\mathcal{D}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0,$$

где потенциалы U и V выражаются через ψ_1, ψ_2 и среднюю кривизну поверхности H.

При этом поверхность восстанавливается по $\psi = (\psi_1, \psi_2)^{\top}$ решением следующего уравнения в группе G

$$g^{-1}g_z = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2)e_1 + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2)e_2 + \psi_1\bar{\psi}_2 e_3,$$

где e_1, e_2, e_3 некоторый ортонормированный базис алгебры Ли группы G. Теми же символами мы будем обозначать соответствующие левоинвариантные векторные поля. Базисы выбраны так, что интегральные кривые полей e_3 в Nil и $\widetilde{SL}_2$ являются осями вращения этих групп. Этот подход реализуется далее для групп Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol. Основными результатами первой главы являются следующие теоремы и их следствия.

Для поверхностей в группе Nil справедлива

Теорема 1. *Для поверхности в* Nil *ее порождающий спинор* $\psi = (\psi_1, \psi_2)^{\top}$ *удовлетворяют уравнению Дирака*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{Nil}}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\mathrm{Nil}} & 0 \\ 0 & V_{\mathrm{Nil}} \end{pmatrix}\right]\psi = 0,$$

$$U_{\mathrm{Nil}} = V_{\mathrm{Nil}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2).$$

Более того, вектор-функция ψ, удовлетворяющая уравнению Дирака, является порождающим спинором некоторой поверхности в Nil.

Записывая уравнения Гаусса-Вейнгартена в терминах спиноров $\psi = (\psi_1, \psi_2)^{\top}$, как следствие их совместности, получаем некоторые аналоги уравнений Кодацци, из которых прямым образом вытекает

Следствие 2. *Для поверхностей в* Nil *квадратичный дифференциал*

$$\widetilde{A}dz^2 = \left(A + \frac{Z_3^2}{2H + i}\right) dz^2$$

голоморфен.

В следствии 2 по определению $A := \langle \nabla_{f_z} f_z, n \rangle$, где ∇ — связность Леви–Чевиты, n — вектор нормали к поверхности, $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ — касательный вектор принадлежащий пространству $T_{f(z)}\mathrm{Nil} \otimes \mathbb{C}$ и $\langle . , . \rangle$ скалярное произведение в пространстве $T_{f(z)}\mathrm{Nil}$ распространенное по линейности на $T_{f(z)}\mathrm{Nil} \otimes \mathbb{C}$. Функция Z_3 определяется из разложения $f_z = Z_1 e_1 + Z_2 e_2 + Z_3 e_3$ или что то же $Z_3 = \langle f_z, e_3 \rangle$. Квадратичный дифференциал $\widetilde{A}dz^2$ далее будем называть обобщенным дифференциалом Хопфа или просто дифференциалом Хопфа.

Более того, верно следующее

Предложение 3. *Если дифференциал Хопфа $\widetilde{A}dz^2$ голоморфный, то поверхность в* Nil *имеет постоянную среднюю кривизну.*

Для поверхностей в группе $\widetilde{SL}_2$ справедлива

Теорема 2. *Для поверхности в группе $\widetilde{SL}_2$, ее порождающий спинор $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$ удовлетворяет уравнению Дирака*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{SL}}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar\partial & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\mathrm{SL}} & 0 \\ 0 & V_{\mathrm{SL}} \end{pmatrix}\right]\psi = 0,$$

$$U_{\mathrm{SL}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}|\psi_1|^2 - \frac{3}{2}|\psi_2|^2\right),$$

$$V_{\mathrm{SL}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{2}\left(\frac{3}{2}|\psi_1|^2 - \frac{1}{2}|\psi_2|^2\right).$$

Любая вектор-функция $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$, удовлетворяющая уравнению Дирака, является порождающим спинором для некоторой поверхности в $\widetilde{SL}_2$.

Как и в случае Nil, из уравнений Кодацци вытекает следующий результат.

Следствие 4. *Для поверхностей постоянной средней кривизны в $\widetilde{SL}_2$ квадратичный дифференциал*

$$\widetilde{A}dz^2 = \left(A + \frac{Z_2^3}{H - \frac{i}{2}}\right) dz^2$$

голоморфен.

В совместной работе Абреша и Розенберга[6] было показано, что для поверхностей постоянной средней кривизны в $S^2 \times \mathbb{R}$ и $H^2 \times \mathbb{R}$ некоторые квадратичные дифференциалы голоморфны и это же утверждение было анонсировано в их совместной работе[7] для поверхностей в Nil, $\widetilde{SL}_2$ и других трехмерных геометриях с четырехмерной группой изометрий. При выводе дифференциалов Хопфа в диссертации использован другой подход. Тем не менее, тщательный анализ показывает, что дифференциал, предложенный работе[7], имеет вид $(H + i\tau)\widetilde{A}dz^2$, где τ равно $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ для Nil и $\widetilde{SL}_2$ соответственно.

Если дифференциал $\widetilde{A}dz^2$ на поверхности в $\widetilde{SL}_2$ голоморфен, то поверхность необязательно имеет постоянную среднюю кривизну (примеры построены в совместной работе Фернандез и Мира[8]).

Для поверхностей в Sol справедлива

Теорема 3. *Пусть отображение $f : M \to \mathrm{Sol}$ задает поверхность. Обозначим через B подмножество M, где $Z_3 = \langle f^{-1}f_z, e_3\rangle = 0$. Пусть B_0 — внутренность B, и пусть C — подмножество в M, выделенное неравенством $Z_3 \neq 0$. Поскольку $M = B_0 \cup \overline{C}$,*

[6] Abresch U., Rosenberg H. The Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ and $H^2 \times \mathbb{R}$ // Acta Math. 2004. V. 193. P. 141–174.

[7] Abresch U., Rosenberg H. Generalized Hopf differentials // Mat. Contemp. 2005. V. 28. P. 1–28.

[8] Fernandez I., Mira P. A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds // Diff. Geom. Appl. 2007. V. 25. P. 281–289.

множество $B \setminus B_0$ лежит в замыкании $\overline{C}$ множества C и имеет нулевую меру. Тогда порождающий спинор ψ поверхности M удовлетворяет уравнению Дирака

$$\mathcal{D}_{\mathrm{Sol}}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\mathrm{Sol}} & 0 \\ 0 & V_{\mathrm{Sol}} \end{pmatrix}\right]\psi = 0,$$

$$U_{\mathrm{Sol}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) - \frac{1}{2}\bar{\psi}_2^2\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_1},$$

$$V_{\mathrm{Sol}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{1}{2}\bar{\psi}_1^2\frac{\bar{\psi}_2}{\psi_2}$$

в C и уравнению Дирака с нулевыми потенциалами: $\bar{\partial}\psi_1 = \partial\psi_2 = 0$, — в B_0. Любая вектор-функция ψ, удовлетворяющая уравнению Дирака на некотором множестве $D \subset M$, является порождающим спинором для некоторой поверхности $f : D \to \mathrm{Sol}$.

Полагая $H = 0$, как следствие для всех трех случаев, получаем уравнения на порождающие спиноры минимальных поверхностей.

Функционал спинорной энергии на замкнутых поверхностях в Nil определяется выражением

$$E(M) = \int_M U_{\mathrm{Nil}} V_{\mathrm{Nil}} \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

В работе доказывается, что он принимает вещественные значение, и его запись в геометрических терминах приводится в следующем предложении.

Предложение 5. *Функционал энергии для поверхности M в группе Nil равен:*

$$E(M) = \frac{1}{4}\int_M \left(H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16}\right) d\mu,$$

где $\widehat{K}$ — секционная кривизна касательной плоскости в точке, $d\mu$ — элемент площади.

Во второй главе исследуются свойства функционала спинорной энергии, определенного в первой главе, и его связь с геометрией поверхностей в Nil.

Из существования аналога дифференциала Хопфа для поверхностей в Nil и в $\widetilde{SL}_2$ выводится, что всякая сфера постоянной средней кривизны является сферой вращения, причем для каждого значения средней кривизны H существует одна такая сфера (с точностью до изометрий объемлющего пространства). Доказательство такого аналога теоремы Хопфа для пространств $S^2 \times \mathbb{R}$ и $H^2 \times \mathbb{R}$ приведено в совместной работе Абреша и Розенберга[6] и переносится для поверхностей в Nil (см. §2.4) и $\widetilde{SL}_2$. Из описания сфер постоянной средней кривизны в Nil выводится

Теорема 4. *Значение функционала спинорной энергии*

$$E(M) = \frac{1}{4}\int_M \left(H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16}\right) d\mu$$

на сферах постоянной средней кривизны в Nil *не зависит от* H *и равно* π.

Для замкнутых поверхностей вращения в Nil функционал спинорной энергии можно представить в форме, позволяющей получить оценки значений функционала снизу. В диссертации это представление для спинорной энергии содержится в теореме 5 в §2.6 и прямыми следствиями этой теоремы являются следующие результаты.

Следствие 6. *Для сфер вращения* $E(M) \geq \pi$ *и равенство достигается, в точности, на сферах постоянной средней кривизны.*

Следствие 7. *Для торов вращения* $E(M) > 0$.

Для произвольных замкнутых поверхностей, оценки снизу пока не известны, тем не менее в диссертации доказывается

Теорема 6. *Сферы постоянной средней кривизны в* Nil *являются критическими точками функционала спинорной энергии* E.

Из указанных выше свойств спектральной энергии следует, что она является правильным аналогом функционала Уиллмора для поверхностей в Nil, хотя ее определение и было навеяно спектральной теорией оператора Дирака.

К основным результатам второй главы можно отнести следствия 6,7 и теорему 6.

Третья глава посвящена изучению поверхностей постоянной средней кривизны в группе Nil.

В терминах порождающих спиноров $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$, уравнения Гаусса–Вейнгартена представляются в виде системы:

$$\partial \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_z - \frac{1}{2}H_z e^{-v} e^{\alpha} & Be^{-v} \\ -e^v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

$$\bar\partial \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^v \\ -\overline{B}e^{-v} & v_{\bar z} - \frac{1}{2}H_{\bar z} e^{-v} e^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

где $e^v := U_{\mathrm{Nil}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)+\frac{i}{4}(|\psi_2|^2-|\psi_1|^2)$, а $B := \frac{1}{4}(2H+i)\widetilde{A}$. Такая запись уравнений Гаусса–Вейнгартена отличается той, что использовалась в первой главе.

Согласно следствию 2, если $H = const$, то $\widetilde{A}dz^2$ и соответственно Bdz^2 — голоморфные квадратичные дифференциалы. Полагая $H = const$, запишем условие совместности уравнений Гаусса–Вейнгартена, воспользовавшись при этом голоморфностью B. Это условие будет иметь вид следующего уравнения.

$$v_{z\bar z} + e^{2v} - |B|^2 e^{-2v} = 0$$

Рассмотрим поверхность постоянной средней кривизны в окрестности неомбилической точки (где $\widetilde{A} \neq 0$). Сделав замену конформного параметра, можем считать, что в этой окрестности $B = C$, где C — некоторая нужная нам константа.

Дополнительно на v необходимо наложить условие, при котором существует решение $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$ уравнений Гаусса–Вейнгартена, такое что $e^v = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)$. При $H = 0$, таким дополнительным условием естественно оказывается требование $Re\,[e^v] = 0$.

Основными результатом главы является

Теорема 8. *Поверхности постоянной ненулевой средней кривизны в некоторой окрестности неомбилической точки описываются решениями $v = \rho + i\phi$ системы уравнений*

$$\begin{cases} v_{z\bar{z}} + 2\sinh 2v = 0 \\ \frac{\varphi_x^2}{(\cosh\rho)^2} + \frac{\varphi_y^2}{(\sinh\rho)^2} = 8\left(\cos 2\varphi - Re\frac{2H+i}{2H-i}\right) \end{cases}$$

Список литературы

[1] Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности в трехмерных группах Ли // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, №6. С. 1248–1264.

[2] Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности вращения в группе Гейзенберга и спектральное обобщение функционала Уиллмора // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, №3. С. 496–511.

[3] Berdinsky D. A. Surfaces of revolution in the Heisenberg group and the spectral generalization of the Willmore functional // Oberwolfach reports. 2007. V. 4, N 2. P. 1356–1358.

В работе [1] второму автору (И.А. Тайманову) принадлежит постановка задачи и, в частности, определение спинорной энергии поверхности с помощью представления Вейерштрасса, в остальном вклад авторов равноценный.

В работе [2] вклад авторов равноценный.

Бердинский Дмитрий Александрович

Представление Вейерштрасса поверхностей
в трехмерных группах Ли и его приложения

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 30.07.2009.	Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 0,9	Печать RISO.
Тираж 60 экз.	Заказ № 123

Отпечатано в центре оперативной печати
«Оригинал 2», ИП Плужникова О. Ф.
633010, г. Бердск, ул. Кошевого, 6